QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

*** Phương pháp chứng minh đường thẳng** $d \perp (P)$

Cách 1: $\left.\begin{array}{l} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = \{I\} \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$

Cách 2: $\left.\begin{array}{l} d // a \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$

Cách 3: $\left.\begin{array}{l} (P) // (Q) \\ d \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$

Cách 4: $\left.\begin{array}{l} (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$

BT1: Cho tứ diện ABCD, ABC và DBC là hai tam giác cân có chung đáy BC, I là trung điểm của BC.

a. Chứng minh rằng : $BC \perp AD$.
b. Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

BT 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B.

a. Chứng minh rằng hình chóp có tất cả các mặt là tam giác vuông.
b. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Chứng minh rằng $AH \perp (SBC)$; $SC \perp (AHK)$.
c. Tìm điểm cách đều 4 điểm A, B, C, S và tìm điểm cách đều 5 điểm A, B, C, H, K.

BT 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông. Tìm điểm cách đều 5 điểm S, A, B, C, D.
b. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $AE \perp (SBC)$; $AF \perp (SCD)$
c. Chứng minh rằng $SC \perp (AEF)$.
d. Gọi K là giao điểm của SC và (AEF). Tìm điểm cách đều 7 điểm A, B, C, D, E, F, K.

BT 4: : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông. Tìm điểm cách đều 5 điểm S, A, B, C, D.
b. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $AE \perp (SBC);\ AF \perp (SCD)$

d. Chứng minh rằng $SC \perp (AEF)$.

e. Gọi K là giao điểm của SC và (AEF). Tìm điểm cách đều 7 điểm A, B, C, D, E, F, K.

BT 5: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$,D là hình chiếu vuông góc của A trên BC, $BC = 2a; AD = a; SA = a\sqrt{2}$,Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB, SC.

a. Chứng minh rằng: $BC \perp (SAD)$.

b. Tính diện tích của tam giác AEF.

BT 6: Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S. Gọi D, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh rằng:

a. $AF \perp SB$ **.**

b. Gọi E là giao điểm của DF và BC. Chứng minh rằng AEB là tam giác vuông.

BT 7: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, tam giác ABC cân tại A với $AB = a; BC = \frac{6a}{5}$. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $AH \perp MD, H \in MD$.

a. Chứng minh rằng: $AH \perp (BCD)$.

b. Cho $AD = \frac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c. Gọi $G_1; G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, DBC. Chứng minh rằng $G_1G_2 \perp (ABC)$.

BT 8: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a. Các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy

b. $SC \perp (BHK)$.

c. $HK \perp (SBC)$.

BT 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Biết SA=SC, SB=SD. Chứng minh rằng:

a. $SO \perp (ABCD)$.

b. $AC \perp SD$.

c. $IJ \perp (SBD)$, I, J lần lượt là trung điểm của BA và BC.

BT 10: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho SN=2NB. Chứng minh rằng:

a. $BC \perp (SAB)$.

b. $NG \perp (SAC)$.

BT 11: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC, hạ $HK \perp DI$. Chứng minh rằng:

a. $HK \perp BC$.
b. K là trực tâm tam giác DBC.

BT 12: Cho hình chóp S.ABC có có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC .Chứng minh rằng:

a. AHK và SHK là các tam giác vuông.
b. Gọi D là giao điểm của HK và BC. Chứng minh rằng $AC \perp AD$.

BT 13: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (DBC)$ và tam giác ABC vuông tại A. Kẻ $DI \perp BC$ tại I.

a. Chứng minh : $BC \perp (AID)$.
b. Kẻ $DH \perp AI$. Chứng minh rằng $DH \perp (ABC)$.
c. Giả sử $\widehat{AID} = \alpha; \widehat{ABD} = \beta; \widehat{ACD} = \gamma$. Chứng minh : $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.
d. Giả sử $AD = a; \beta = \gamma = 30^0$. Tính BC và α .

BT 14: Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD.

a. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$
b. Chứng minh $AC \perp SK;\ \mathrm{CK} \perp \mathrm{SD}$.

BT 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân tại S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh: $SI \perp (SCD),\ \mathrm{SJ} \perp (SAB)$.
b. Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp AC$. Tính SH theo a.

BT 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với đáy. $AB = BC = a;\ \mathrm{AD} = 2\mathrm{a}$. Chứng minh rằng:

a. $BC \perp (SAB)$.
b. Chứng minh tam giác SCD là tam giác vuông.

BT 17: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình thang vuông, đường cao $AB = a, BC = 2a$, $SC \perp BD$.

a. Chứng minh tam giác SBC là tam giác vuông.
b. Tính AD theo a.
c. Gọi M là một điểm trên đoạn SA, đặt $AM = x; 0 \le x \le a$. Tính độ dài đường cao DE của tam giác BDM theo a và x. Tìm x để DE lớn nhất , nhỏ nhất.

BT 18: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$, tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh:

a. $SI \perp (ABC)$.
b. $BC \perp (SAI)$.

BT 19: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^0; \widehat{BSC} = 90^0; \widehat{CSA} = 60^0$

a. Chứng minh tam giác ABC vuông.
b. Xác định hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC). Tính SH theo a.

BT 20: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều, cạnh a. $SA = SB = SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

a. Xác định hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC). Tính SH theo a.
b. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $BC \perp (SAM)$.

BT 21: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. $SB = SC = SD = a$; $SA = a\sqrt{2}$

a. Chứng minh rằng tam giác SAC là tam giác vuông.
b. Xác định hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABCD). Tính SH theo a.
c. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

BT 22: Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm tam giác ABC.
b) $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$.

BT 23: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A trên SB,SC. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
b) Gọi E là hình chiếu của A trên (SBD). Chứng minh rằng E là trực tâm tam giác SBD.

BT 24: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a; AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh rằng $CD \perp (SAC)$.
b) H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh rằng : $AH \perp (SBC)$.

BT 25: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình chữ nhật $AB = a; BC = a\sqrt{8}$, SBC là tam giác vuông tại B, SCD là tam giác vuông tại D, $SD = a\sqrt{5}$

a) Chứng minh rằng $SA \perp (ABCD)$, tính SA theo a
b) Đường thẳng qua A, vuông góc với AC, cắt CB,CD tại I,J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K, E là giao điểm của SB,SD với mặt phẳng (HIJ). Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$ và $AE \perp (SCD)$
c) Tính diện tích tứ giác AKHE .

BT 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác có tam giác ABD là tam giác đều, tam giác BCD cân tại C, $\widehat{BCD} = 120^0$. Cạnh SA vuông góc với đáy .

a) Gọi H, K lần lượt llaf hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$.
b) Gọi C’ là giao điểm của SC với (AHK) ,tính diện tích tứ giác AKHC’, biết AB = SA = a.

BT 27: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình vuông cạnh a , Sa vuông góc với đáy, SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC, cắt SB,SC,SD lần lượt tại H,I,K.

a) Chứng minh rằng HK//BD .
b) Chứng minh rằng: $AH \perp SB; AK \perp SD$
c) Chứng minh rằng tứ giác AHIK có 2 đường chéo vuông góc . Tính diện tích tứ giác AHIK.

B. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC:

*** Cách chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:**

Cách 1: $\left.\begin{matrix} d \subset (P) \\ d \perp (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (Q) \perp (P)$

Cách 2: $\widehat{((P),(Q))} = 90^0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$

BT 1: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B.Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh rằng : $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh rằng $(AHC) \perp (SBC)$; $(SAC) \perp (AHK)$.

BT 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

e. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(AEC) \perp (SBC)$; $(ACF) \perp (SCD)$
f. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AEF)$.

BT 4: : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

f. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (SAC)$.
g. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(AEC) \perp (SBC)$; $(ACF) \perp (SCD)$
h. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AEF)$.

BT 5: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. I là trung điểm của SC.Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAC)$.
b) $(SBC) \perp (ABI)$

BT 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. H là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: $(SAB) \perp (SAD)$

BT 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh rằng: $SA \perp (ABCD)$
b) Chứng minh rằng : $(SAC) \perp (SBD)$

BT 8: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

d. $(SAH) \perp (SBC)$.
e. $(CHK) \perp (SBC)$.

BT 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. SA =SB =SC=a.

a) Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (ABCD)$
b) Chứng minh rằng : tam giác SBD là tam giác vuông.

BT 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh a, $BD = a, \mathrm{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. SC vuông góc với đáy. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

BT 11: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SH vuông góc với đáy, biết H thuộc đoạn BC.

a) Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (ABC)$
b) Kẻ $HI \perp AB; HK \perp AC$, tứ giác AIHK có đặc điểm gì?
c) Chứng minh $(SHI) \perp (SAB)$, $(SHK) \perp (SAC)$
d) Kẻ $HM \perp SI; HN \perp SK$, chứng minh rằng $HM \perp (SAB); HN \perp (SAC)$.

BT 12: Cho tứ diện đều ABCD, gọi H là hình chiếu của A trên (BCD), O là trung điểm của AH. Chứng minh rằng (OBC), (OCD), (OBD) đôi một vuông góc .

BT 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA = AB. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, M là trung điểm của SC

a) Chứng minh rằng: $(SAC) \perp (SBD)$
b) Chứng minh rằng : $(SAD) \perp (SCD)$
c) Chứng minh rằng $(SCD) \perp (ABM)$.
d) Kẻ $AH \perp (SBC)$. Tính độ dài AH.

BT 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh rằng: $(SAC) \perp (SBD)$
b) Từ O kẻ $OK \perp BC$ Chứng minh rằng : $(SBC) \perp (SOK)$
c) Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh rằng $OH \perp (SBC)$.

BT 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh rằng: $(SAB)\perp(SAD);(SAB)\perp(SBC)$

b) Gọi H,I lần lượt là trung điểm của AB, BC. Chứng minh rằng : $(SHC)\perp(SDI)$

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

BT 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật,SA vuông góc với đáy. Kẻ $AH\perp SB;AK\perp SD$.

a) Chứng minh rằng: $(SBC)\perp(SAB)$

b) Chứng minh rằng : $(AHK)\perp(SAC)$

BT 16 : Cho tam giác đều ABC cạnh a, D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

a) Chứng minh rằng: $(SAB)\perp(SAC)$

b) Chứng minh rằng : $(SBC)\perp(SAD)$

BT 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Gọi M,N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM=\frac{a}{2};\text{D}N=\frac{3a}{4}$, Chứng minh rằng: $(SAM)\perp(SMN)$.

BT 18 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a , hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. $SB=SD=a;\text{BD}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

a) Chứng minh tam giác SAC là tam giác vuông

b) Chứng minh rằng : $(SBC)\perp(SCD)$.

BT 19 : Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tai O lấy điểm S sao cho $SB=a$, biết $AC=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh rằng tam giác SAC vuông.

b) Chứng minh rằng : $(SAB)\perp(SAD)$

BT 20: Cho hình chóp đều S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, M, N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Biết $(AMN)\perp(SBC)$ .Tinh diện tích tam giác AMN.

BT 21 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a , . $BD=a;\text{SC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, SC vuông góc với (ABCD) .Chứng minh rằng : $(SAB)\perp(SAD)$

BT 22 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với đáy. M là trung điểm của BC, tìm điểm N trên CD sao cho $(SAM)\perp(SMN)$.

BT 23 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh SA vuông góc với đáy, (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (α) cắt SC tại I.

a) Xác định giao điểm K của SO và (α).
b) Chứng minh rằng : $(SBD)\perp(SAC)$ và BD//(α).
c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α)

BT 24 : Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A, hai đáy là $AD=2a; BC=AB=a; \mathrm{SA}=\mathrm{a}\sqrt{2}$. SA vuông góc với (ABCD).

a) Chứng minh rằng $(SAC)\perp(SCD)$.
b) Dựng thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (P) chứa AB và vuông góc với(SCD). Tính diện tích thiết diện đó theo a.

BT 25: Cho tứ diện SABC có ba đỉnh A,B,C tạo thành tam giác vuông cân đỉnh B, $AC=2a$. SA vuông góc với (ABC), SA = a.

a) Chứng minh rằng : $(SAB)\perp(SBC)$
b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh rằng $AH\perp(SBC)$. Tính độ dài AH.
c) Từ trung điểm O của AC kẻ $OK\perp(SBC)$. Tính độ dài OK.

BT 26 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $CK\perp BD$.

a) Chứng minh rằng $C'K\perp BD$.
b) Chứng minh rằng : $(C'BD)\perp(C'CK)$
c) Kẻ $CH\perp C'K$. Chứng minh rằng $CH\perp(C'BD)$.

BT 27 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB=SA=a. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB,CD .Mặt phẳng (P) qua CD và vuông góc với (SAB) cắt SA, SB lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh rằng : $(SAB)\perp(SIK)$
b) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện theo a.

BT 28 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng : $(SCD)\perp(SAD)$.
b) Cắt hình chóp bởi mặt phẳng (P) chứa AB và vuông góc với (SCD). Tính thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

BT 29 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO sao cho $AM = x; 0 \le x \le \frac{a\sqrt{2}}{2}$

a) Gọi H là hình chiếu của M trên (SBC). Tính MH.
b) Mặt phẳng $(\alpha) \perp AC$ tại M, xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).Tìm x để diện tích đó lớn nhất .

BT 30 : Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, \widehat{ABC} = 60^0$. $SB \perp (ABC)$ $SB = 2a$

a) Chứng minh rằng : $(SAB) \perp (SAC)$
b) Lấy M thuộc đoạn AB sao cho $BM = x, 0 < x < a$. Qua M dựng mặt phẳng (P) song song với AC và SB. Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp. Tìm x để diện tích này lớn nhất.